# Zur Determinante einer Summe aus Kronecker-Produkten (Kleine Mitteilung)

Cottin, N.

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 41, 1989, S.83-86

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

**Kleine Mitteilung**

# Zur Determinante einer Summe aus Kronecker-Produkten

Von **N. Cottin**, Hannover

Vorgelegt von Hans Günter Natke

(Eingegangen am 1. 8. 1989)

## Übersicht

Bei der analytischen Untersuchung der Informationsmatrix im Hinblick auf eine optimale parametrische Identifikation linearer elastomechanischer Systeme sind die im folgenden mitgeteilten mathematischen Sätze über die Determinante einer Summe aus bestimmten Kronecker-Produkten nützlich.

## 1. Schätztheoretischer Hintergrund

Ein durch theoretische Systemanalyse gewonnenes mathematisches Modell eines realen Systems kann durch eine experimentelle Systemanalyse (Identifikation) verbessert werden [1] [2], wobei sich die Frage nach einer geeigneten Versuchsauslegung ergibt. Handelt es sich bei dem System z.B. um ein lineares elastomechanisches System, und sind die Bewegungsgleichungen, mit denen sich das dynamische Verhalten des Systems (näherungsweise) beschreiben läßt, ihrer allgemeinen Form nach a priori bekannt (Struktur des mathematischen Systemmodells), kann die gesamte Information, die der Versuch liefert, auf die Schätzung der verbleibenden unbekannten Modellparameter verwendet werden [1] [2]. Ist das benutzte Schätzverfahren im Sinne der Schätztheorie optimal [3], hängt die Güte der Parameterschätzwerte allein von den verwendeten Meßdaten ab, d.h. insbesondere auch von der Art der Systemerregung.

Zum Auffinden einer optimalen Versuchsauslegung [4], a priori anhand des Systemmodells, verwendet man die Informationsmatrix [1], deren Inverse eine untere Schranke für die Varianzen und Kovarianzen der (unverzerrten) Parameterschätzwerte darstellt (Cramèr-Rao-Ungleichung [1] [5]). Welche zulässigen Systemerregungen (oder auch Systemantworten) als optimal für eine Parameterschätzung anzusehen sind, wird durch sogenannte Optimalitätskriterien [6] festgelegt. Bei dem oft verwendeten Kriterium der D-Optimalität ist diejenige zulässige Systemerregung optimal, für die der Wert der Determinante der inversen Informationsmatrix minimal wird („Minimum der verallgemeinerten Varianz“ [7] der Parameterschätzwerte).

## 2. Anwendung auf lineare elastomechanische Systeme

Wird bei einem (zeitinvarianten) linearen elastomechanischen System die Schätzung der Parameter (z.B. Elemente der Trägheits-, Steifigkeits- oder Dämpfungsmatrix) im

Frequenzbereich ausgeführt, dann führen analytische Untersuchungen [8] [9] auf eine bestimmte allgemeine Form der Informationsmatrix, deren wesentlicher Kern durch eine Summe aus Kronecker-Produkten dargestellt wird, in denen (Produkte von) Frequenzgangmatrizen mit (dyadischen Produkten aus den) Antwortvektoren des Systemmodells verknüpft sind; summiert wird über die Erregungsfrequenzen. Um einen analytischen Ausdruck für die Determinante der Informationsmatrix zu erhalten, ist der folgende Satz nützlich:

**Satz:**
Gegeben seien n Vektoren $x_k$ mit $X := [x_1, \dots, x_n]$ und $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und n Matrizen $A_k \in \mathbb{C}^{m\times m}$, dann gilt

$$\det\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k x_k^+ \otimes A_k\Big) = (\det XX^+)^m \prod_{k=1}^{n} \det A_k.$$

($^+$ bedeutet transponiert konjugiert komplex).

**Beweis:**
Bezeichnet $I_n$ die Einheitsmatrix n-ter Ordnung mit $I_n =: [n_1, \dots, n_n]$, läßt sich die Summe der n Kronecker-Produkte durch

$$\sum_{k=1}^{n} x_k x_k^+ \otimes A_k = (X \otimes I_m)\Big(\sum_{k=1}^{n} n_k n_k^T \otimes A_k\Big)(X^+ \otimes I_m)$$

ausdrücken. Daraus folgt für die Determinante dieser Summe

$$\det\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k x_k^+ \otimes A_k\Big) = \det(XX^+ \otimes I_m) \prod_{k=1}^{n} \det A_k$$

und hieraus die Behauptung. ■

Hieraus folgt, daß genau dann

$$\det\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k x_k^+ \otimes A_k\Big) \neq 0 \text{ ist,}$$

wenn für $k = 1(1)n$ die $x_k$ eine vollständige Basis im $\mathbb{C}^n$ bilden und $\det A_k \neq 0$ ist.

Die Anzahl der Erregungsfrequenzen, über die in der Informationsmatrix summiert wird, ist i.a. wesentlich größer als die Ordnung der Modellmatrizen. In diesem Fall wird die folgende Erweiterung des Satzes wichtig:

**Satz:**
Gegeben seien N Vektoren $y_k \in \mathbb{C}^n$, $N \geq n$, mit $y_k := a_k x_i$, $a_k \in \mathbb{C}$, $x_i \in \mathbb{C}^n$, $i = k$ mod(ulo) n, mit $X := [x_1, \dots, x_n]$ und N Matrizen $A_k \in \mathbb{C}^{m\times m}$, dann gilt

$$\det\Big(\sum_{k=1}^{N} y_k y_k^+ \otimes A_k\Big) = (\det XX^+)^m \prod_{k=1}^{n} \det\Big(\sum_{l=0}^{\left[\frac{N-k}{n}\right]} |a_{k+l\cdot n}|^2 A_{k+l\cdot n}\Big).$$

**Beweis:**

Nach Voraussetzung ist

$$\sum_{k=1}^{N} y_k y_k^+ \otimes A_k = \sum_{k=1}^{N} x_{k \bmod n} x_{k \bmod n}^+ \otimes |a_k|^2 A_k$$

$$\equiv \sum_{k=1}^{n} x_k x_k^+ \otimes \sum_{l=0}^{\left[\frac{N-k}{n}\right]} |a_{k+l\cdot n}|^2 A_{k+l\cdot n},$$

woraus nach dem zuvor bewiesenen Satz die Behauptung folgt. ■

Hieraus ergibt sich die Schlußfolgerung: Für

$$\det\Big(\sum_{k=1}^{N} y_k y_k^+ \otimes A_k\Big) \neq 0$$

ist notwendig, daß für $k = 1(1)n$ die $x_k$ eine vollständige Basis im $\mathbb{C}^n$ bilden und für jedes $k = K$ mit $l = 0(1)\left[\frac{N-K}{n}\right]$ mindestens einer der Ausdrücke $|a_{K+l\cdot n}| \det A_{K+l\cdot n} \neq 0$ ist; ist darüber hinaus die Summe der Matrizen $\sum_{l=0} A_{k+l\cdot n}$ für jedes $k = 1(1)n$ positiv definit, ist die Bedingung auch hinreichend, und es gilt

$$\det\Big(\sum_{k=1}^{N} y_k y_k^+ \otimes A_k\Big) > 0.$$

Die Erfüllung der hinreichenden Bedingung bedeutet für die Informationsmatrix aus [8] [9], daß mit jeder zusätzlichen Erregungsfrequenz sich der Wert ihrer Determinante vergrößert und damit die Information bezüglich der Parameterwerte zunimmt [7]. Mit Hilfe der oben bewiesenen Sätze kann nun der jeweilige Zuwachs an Informationen quantitativ genau erfaßt werden.

## Schrifttum:

[1] Eykhoff, P.: System Identification – Parameter and State Estimation; John Wiley & Sons, London / New York / Sydney / Toronto (1974).

[2] Natke, H.G.: Einführung in Theorie und Praxis der Zeitreihen- und Modalanalyse; Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig / Wiesbaden (1988).

[3] Deutsch, R.: Estimation Theory; Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.Y. (1965).
[4] Pázman, A.: Foundations of Optimum Experimental Design; D. Reidel Publishing Company, Dordrecht / Boston / Lancaster / Tokyo (1986).
[5] Goodwin, G.C., R.L. Payne: Dynamic System Identification – Experiment Design and Data Analysis; Mathematics in Science and Engineering, Vol. 136, Academic Press, New York / San Francisco / London (1977).
[6] Mehra, R.K.: Choice of Input Signals; in: Eykhoff, P. (Ed.): Trends and Progress in System Identification; Pergamon Press, Oxford / New York / Toronto / Sydney / Paris / Frankfurt (1981), pp. 305–366.
[7] Bard, Y.: Nonlinear Parameter Estimation; Academic Press, New York and London (1974).
[8] Cottin, N.: Versuchsoptimierung für die parametrische Identifikation linearer elastomechanischer Systeme – Parameteranpassung des Rechenmodells; in: Natke, H.G. und K. Popp (Herausgeber): Dynamische Probleme – Modellierung und Wirklichkeit; Mitteilung des Curt-Risch-Institutes der Universität Hannover (1987), CRI-K-1/1987, S. 255–272.
[9] Cottin, N.: Optimale Versuchsauslegung für die Identifikation elastomechanischer Systeme; Forschungsbericht aus dem Curt-Risch-Institut; CRI-F-1/1987, Universität Hannover (1987).